L1 de MQ1 30/03/2010

Curso de Mecânica Quântica 1 - 2010.1 - UFF - Prof. Marco Moriconi

1. Considere as seguintes matrizes densidade:

$$\rho_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad , \quad \rho_2 = \begin{bmatrix} \frac{9}{25} & \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{16}{25} \end{bmatrix}$$

$$\rho_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \rho_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\rho_5 = \frac{1}{3}|u\rangle\langle u| + \frac{2}{3}|v\rangle\langle v| + \frac{\sqrt{2}}{3}|v\rangle\langle u| + \frac{\sqrt{2}}{3}|u\rangle\langle v|$$

   Os estados $|u\rangle$ e $|v\rangle$ formam uma base ortonormal. Quais são aceitáveis para descrever sistemas físicos? Quais correspondem a estados puros?

2. Suponha que um certo observável físico é descrito pelo operador $\mathbf{M}$ dado por:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

   Quais são os possíveis resultados das medidas de $\mathbf{M}$? Quais os estados correspondentes? Calcule a probabilidade de medirmos 0 para cada uma das matrizes densidades a seguir:

$$\rho_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad , \quad \rho_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad , \quad \rho_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{2}$$

3. O conjunto de matrizes densidade possíveis para descrever um sistema formam um conjunto convexo. Isso significa que se considerarmos uma coleção ρ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, então para quaisquer a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, tal que $a_i \geq 0$ e $\sum_i a_i = 1$, o operador $\rho = \sum_i a_i \rho_i$ pode descrever um sistema físico (é aceitável), ou seja, é hermiteano, positivo e $\mathrm{tr}\rho = 1$. Dizemos então que este operador ρ está escrito como uma combinação convexa dos ρ_i.

   (a) Verifique as propriedades de ρ que acabamos de mencionar.

   (b) Mostre que para ρ_i e ρ_j, temos $0 \leq \mathrm{tr}(\rho_\mathrm{i}\rho_\mathrm{j}) \leq 1$.

   (c) Mostre que um estado puro *não* pode ser escrito como uma combinação convexa não trivial de outros operadores de estado. Mostre que estados não-puros sempre podem ser escritos como uma combinação convexa de outros operadores de estado.

   (d) Considere $\rho = a|u\rangle\langle u| + (1-a)|v\rangle\langle v|$, onde $|u\rangle$ e $|v\rangle$ são ortonormais. Mostre que existem infinitas formas de escrever esse operador de estado como a combinação convexa de operadores de estado correspondentes a estados puros. Isso mostra que a decomposição de estados não puros em uma combinação convexa de estados puros não é única. Mostre que isso é válido em geral.

4. Considere um sistema composto de duas partes, s (subsistema) e R (reservatório), e que ρ é a matriz densidade de um estado que descreve o sistema composto. Mostre que para que o subsistema s se encontrar em um estado puro, então necessariamente $\rho = P_s \otimes \rho_R$, onde P_s é um projetor no espaço de Hilbert de s.

5. Em sala mostramos a relação de incerteza de Heisenberg entre posição e momento, $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$. Considerando o problema unidimensional, encontre o estado $|\psi\rangle$ (na representação x, por exemplo) que satura esta desigualdade, isto é, encontre $|\psi\rangle$ tal que $\Delta x \Delta p = \hbar/2$.

6. Uma máquina prepara fótons por um processo que tem uma probabilidade de 70% de produzir fótons com polarização circular à direita e 30% com polarização linear à esquerda. Estes estados serão representados por $|\circlearrowright\rangle$ e $|\circlearrowleft\rangle$, respectivamente.

   (a) Qual é a entropia destes fótons se realizarmos um teste de polarização circular? E se for um teste de polarização linear?

   (b) Imagine agora que a máquina prepara fótons por um processo que tem probabilidade 70% de gerar fótons com polarização à direita e 30% de gerar fótons linearmente polarizados na direção x. Qual a entropia destes fótons em um teste de polarização circular? E no caso de um teste de polarização linear na direção x?

   Esse problema ilustra o fato de que a entropia de um sistema quântico pode depender também do tipo de medida que estamos fazendo. [nota: pode ser útil saber que $|\circlearrowright\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\rightarrow\rangle + i|\uparrow\rangle)$ e $|\circlearrowleft\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\rightarrow\rangle - i|\uparrow\rangle)$, onde $|\rightarrow\rangle$ e $|\uparrow\rangle$ são fótons polarizados linearmente nas direções x e y.]

7. Um certo hamiltoniano H que descreve um sistema de dois níveis possui autovalores E_1 e E_2, correspondentes a autoestados $|E_1\rangle$ e $|E_2\rangle$. Em $t = 0$ este sistema de dois níveis se encontra no estado $|\psi, 0\rangle = c_1|E_1\rangle + c_2|E_2\rangle$.

   (a) Qual o estado deste sistema em um instante de tempo $t > 0$?

   (b) Calcule ΔE para este estado.

   (c) Calcule a probabilidade de sobrevivência deste estado para um t qualquer. Encontre o menor intervalo de tempo possível, τ, para que a probabilidade de sobrevivência seja mínima. Essa probabilidade pode ser menor do que 1/2?. Quanto é $\tau \Delta E$?

8. Considere um estado inicial $|\psi, 0\rangle$ com uma certa distribuição de energia arbitrária $|\langle E|\psi, 0\rangle|^2$, onde $|E\rangle$ são os autovetores do hamiltoniano correspondentes à energia E. Defina W_α, com $0 \leq \alpha \leq 1$, como sendo o menor intervalo de energia tal que

$$\int_{W_\alpha} |\langle E|\psi, 0\rangle|^2 dE = \alpha. \tag{3}$$

   Defina τ_β como sendo o menor tempo necessário para que a probabilidade de sobreviência do estado, $P(t) = |\langle \psi, t|\psi, 0\rangle|^2$, seja menor do que β, com $0 \leq \beta \leq 1$. Mostre que

$$W_\alpha \tau_\beta \geq 2\hbar \cos^{-1}\left(\frac{1 - \alpha + \sqrt{\beta}}{\alpha}\right). \tag{4}$$

   Essa relação de incerteza energia-tempo é aplicável mesmo no caso em que os momentos $\langle \psi, 0|H^n|\psi, 0\rangle$ não são finitos.

9. Em sala discutimos a representação de Heisenberg e Schroedinger. Existe uma outra representação, chamada de representação de interação que é definida da seguinte maneira. Considere um hamiltoniano dado por $H = H_0 + V$, onde H_0 é um hamiltoniano simples e V um

potencial. Por hamiltoniano simples queremos dizer um hamiltoniano que sabemos resolver explicitamente, como por exemplo, o hamiltoniano que descreve uma partícula livre. Se $|\psi, t\rangle_S$ é o estado de um sistema na representação, então o estado na representação de interação é definido por $|\psi, t\rangle_I = e^{iH_0 t/\hbar}|\psi, t\rangle_S$.

(a) Mostre que $|\psi, t\rangle_S$ satisfaz à

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - V_I(t)\right)|\psi, t\rangle_I = 0, \tag{5}$$

onde

$$V_I(t) = e^{iH_0 t/\hbar} V e^{-iH_0 t/\hbar} \tag{6}$$

(b) Mostre que se escrevermos $|\psi, t\rangle_I = U_I(t, t')|\psi, t'\rangle_I$, então o operador $U_I(t, t')$ satisfaz à

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - V_I(t)\right)U_I(t, t') = 0. \tag{7}$$

(c) Finalmente, mostre que no caso em que $V_I(t_1)$ e $V_I(t_2)$ comutam para quaisquer t_1 e t_2, então

$$U_I(t, t') = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t} d\tau V_I(\tau)\right). \tag{8}$$

10. As matrizes de Pauli σ_x, σ_y e σ_z são dadas por:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

O hamiltoniano de um sistema é dado por $H = \hbar\omega\sigma_z$. Usando a representação de Heisenberg

(a) Encontre as equações de movimento para σ_{xH} e σ_{yH}, onde o subescrito H indica que estes são os operadores na representação de Heisenberg, não as matrizes de Pauli, que são constantes.

(b) Resolva as equações do item anterior.

(c) Encontre as constantes de movimento.

11. Um sistema é composto de duas partes, 1 e 2. Os estados que descrevem estas partes são denotados $|\pm\rangle_i$ com $i = 1, 2$. Inicialmente este sistema está no estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|+\rangle_1 \otimes |+\rangle_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}|-\rangle_1 \otimes |+\rangle_2. \tag{10}$$

(a) Escreva a matriz densidade deste sistema. Verifique que $\text{tr}\rho = \text{tr}\rho^2 = 1$.

(b) Calcule o traço parcial na parte 2. O sistema assim obtido é descrito por um estado puro?

(c) O sistema original é descrito por um estado emaranhado?

(d) Calcule a entropia do estado original e do estado obtido no intem b). Explique o que aconteceu com a entropia.

12. Considere dois observáveis descritos pelos operadores

$$\sigma_z = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \sigma_x = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Encontre a relação de incerteza para estes observáveis. Verifique a validade desta relação para o estado dado por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}. \tag{12}$$